УДК 378

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТРИ-ТКАНЕЙ В ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ К ПОПУЛЯРИЗАЦИИ МАТЕМАТИКИ

**Уткина Т.И., доктор педагогических наук, профессор,
Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
Оренбургского государственного университета, г. Орск
UtkinaTI@yandex.ru**

**Уткин А.А., кандидат физико-математических наук, доцент,
Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
Оренбургского государственного университета, г. Орск
UtkinAA@yandex.ru**

Аннотация. Работа посвящена возможности использования дисциплин из вариативной части образовательной программы в подготовке бакалавров к культурно-просветительской деятельности относительно популяризации математики.

Ключевые слова: три-ткань, популяризация математики, культурно-просветительские программы

QUESTIONS OF THE THEORY OF THREE-WEBS IN TRAINING OF BACHELORS TO THE POPULARIZATION OF MATHEMATICS

**T.I. Utkina, doctor of pedagogics, professor,
Orsk humanitarian technological institute(branch)of Orenburg state university, Orsk
UtkinaTI@yandex.ru**

**A.A. Utkin, candidate of physics and mathematical sciences, docent,
Orsk humanitarian technological institute(branch)of Orenburg state university, Orsk
UtkinAA@yandex.ru**

Abstract. The work is devoted to the possible use of disciplines of variable part of educational programs in training of bachelors to the cultural and educational activities concerning the popularization of mathematics.

Keywords: three-webs, popularization of mathematics, cultural and educational programs

Актуальность вопроса подготовки бакалавров педагогического образования к проведению работ по математическому просвещению и популяризации математики обусловлена требованиями Концепции развития математического образования в Российской Федерации [1], профессиональным стандартом «Педагог» [3], Концепцией Федеральной целевой программы развития образования на 2016 - 2020 годы [2].

Исследование, проведённое на базе Орского гуманитарно-технологический института, позволило выявить и апробировать эффективную технологию подготовки студентов к организации работ по популяризации математики, которая ориентирована на формирование профессиональной компетентности будущего бакалавра педагогического образования относительно способности разрабатывать и реализовывать культурно-просветительские программы в условиях изучения дисциплины «Вопросы теории три-тканей» из вариативной части образовательных программ по направлению подготовки Педагогическое образование (с одним и двумя профилями подготовки «Математика» и «Математика», «Физика»). Суть технологии состоит в овладении студентами методологическими знаниями по проектированию, планированию и организации работ по математическому просвещению и популяризации математики. Технология строится на основе компетентностного, процессного, интегративного, деятельностного и личностного подходов. В основу положены принципы важности математического образования для будущего страны, связи математики с жизнью и производственной практикой, преемственности и систематичности, гордости за достижение российских ученых, сочетания управления с развитием самостоятельности, согласованности требований ФГОС общего и высшего образования. Структура технологии состоит из следующих компонентов и связей с ними: ознакомление студентов с теоретическими основами популяризации математики; формирование компетенций по планированию и проектированию научно-популярных лекций; публичное предъявление научно-популярных лекций (на семинарских занятиях, в общеразвивающих и предпрофессиональных программах в организациях среднего общего образования).

Общая трудоёмкость курса «Вопросы теории три-тканей» составляет 3 зачетных единицы (108 академических часов) и включают три раздела: квазигруппы и лупы (32 часа, из них 4 лекций, 8 практических занятий и 20 самостоятельная работа), общие вопросы теории три-тканей (48 часов , из них 4 лекций, 10 практических занятий и 34 самостоятельная работа) , математические модели (28 часов , из них 4 лекций, 4 практических занятий и 20 самостоятельная работа). Методическим средством формирования готовности студентов к проведению работ по популяризации математики выступает комплекс специальных учебно-методических задач, выполняемых в условиях выполнения планируемой самостоятельной работы (курсовые работы, научно-популярные лекции, выпускные квалификационные работы) по этому курсу.

Понятие три-ткани позволяет естественным образом интегрировать различные математические структуры, изучаемые студентами в дисциплинах вариативной части образовательной программы. Три-ткань – математическая структура, можно сказать, универсального уровня, позволяющая выявить подход, направленный на формирование целостного представления о математических структурах и их практических приложениях, в том числе и в работе по математическому просвещению и популяризации математики.

Три-ткань, рассматриваемая с точностью до локальных диффеоморфизмов, однозначно определяется своим уравнением $z = f(x,y)$, где f – произвольная гладкая функция. Поэтому теория тканей имеет разнообразные приложения в разных разделах математики и физики. Но геометрия тканей тесно связана и с многими другими «классическими» областями математики. В первую очередь можно выделить: вопросы аксиоматического обоснования элементарной и проективной геометрий; алгебраическую теорию групп и теорию непрерывных групп Ли; проективную и алгебраическую геометрии; классическую дифференциальную геометрию Гаусса; проективную дифференциальную геометрию; риманову геометрию и ее обобщения; вариационное исчисление; теорию функций; формы Пфаффа и дифференциальные уравнения; теорию расслоенных пространств; теорию квазигрупп и луп, конформную геометрию.

Сущностные характеристики понятия три-ткани связаны с криволинейной тканью и методом внешних форм. Криволинейная ткань рассматривается как совокупность нескольких семейств гладких кривых, заданных на плоскости, на поверхности однородного пространства или на некотором гладком двумерном многообразии. Через каждую точку области определения проходит по одной линии из каждого семейства, линии ткани в каждой точке трансверсальны, и у каждой точки есть окрестность, в которой каждое из семейств образует слоение. Криволинейные ткани различают по количеству семейств кривых, их составляющих (2-ткани или сети, три-ткани, d-ткани), и по отношению эквивалентности (локальных диффеоморфизмов), сохраняющего трансверсальность слоев. Основной геометрический образ в дифференциально-топологической теории тканей – конфигурации, образованные слоениями ткани. При локальных диффеоморфизмах сохраняется свойство конфигураций быть замкнутыми.

Заметим, что в дифференциально-топологической теории тканей не имеет смысла рассматривать сети (2-ткани), поскольку подходящим локальным диффеоморфизмом всякую сеть можно отобразить (локально) на декартову сеть. Но три-ткани уже представляют собой нетривиальный объект, так как не существует, вообще говоря, локального диффеоморфизма, который все три семейства отображает на три семейства параллельных прямых.

Поскольку два семейства линий произвольной три-ткани W всегда можно «выпрямить» и принять за декартову сеть, то в некоторой окрестности ее (т.е. три-ткань) можно задать уравнением $z = f(x, y)$, причем линии третьего семейства суть линии уровня функции f. Ограничение на функцию $f(x, y)$ минимально: уравнение ткани должно быть однозначно разрешимо (локально) относительно каждой из переменных x и y. Последнее обстоятельство делает теорию тканей приложимой к любой теории, где объектом изучения является гладкая функция двух переменных. Это, например, некоторые физические законы, двусторонне разрешимые бинарные операции (квазигруппы и лупы), дифференциальные уравнения.

В основу подхода формирования понятия три-ткани у будущего учителя математики положен метод внешних форм. В курсе предусматриваются задания на исследование относительных инвариантов кривизны три-ткани, определяемой дифференциальным уравнением.

Следует заметить, что три-ткани могут выступать инструментом классификации дифференциальных уравнений с точностью до изотопических преобразований, в чем и сказывается их универсальность.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = F(x, y)$ определяет три-ткань состоящую из семейств линий $x = const$, $y = const$, $f(x, y) = const$ причем последнее семейство состоит из интегральных кривых уравнения $y' = F(x, y)$. Обратно, каждая криволинейная три-ткань W эквивалентна некоторой три-ткани $\widetilde{W}$, состоящей из трех вышеуказанных семейств, причем слои третьего слоения ткани $\widetilde{W}$ являются интегральными кривыми некоторого обыкновенного дифференциального уравнения $f_x dx + f_y dy = 0$.

Уравнение три-ткани $z = f(x, y)$ определено с точностью до изотопических преобразований, то есть локальных диффеоморфизмов вида $x = \alpha(\tilde{x}),\quad y = \beta(\tilde{y}),\quad z = \gamma(\tilde{z}),$ определяющих замену параметров на слоях ткани. Для рассматриваемых три-тканей параметром в третьем слоении является постоянная интегрирования. Таким образом, уравнение $y' = F(x, y)$ определено с точностью до замен вида $x = \alpha(\tilde{x}),\quad y = \beta(\tilde{y}),$ переводящих декартову сеть $x = const$, $y = const$ снова в декартову сеть. Таким образом, можно классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения с точностью до изотопических преобразований при помощи дифференциально-геометрических инвариантов соответствующей три-ткани. Здесь, в качестве примера, рассмотрим случаи, когда три-ткань W определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка, уравнением Риккати и уравнением Абеля первого рода.

1. Пусть три-ткань W определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка $y' = f(x)\, y + g(x)$. (1) Уравнение (1) с помощью изотопического преобразования $f(x)dx = d\tilde{x}$ приводится к виду $dy + (y + \tilde{g}(\tilde{x}))d\tilde{x} = 0.$ (2)

Опустив тильду, обозначим $\omega_1 = (y + g(x))dx,\quad \omega_2 = dy.$ (3)

Определим слоения три-ткани W уравнениями Пфаффа $\omega_1 = 0,\quad \omega_2 = 0,\quad \omega_1 + \omega_2 = 0$ (4)

соответственно. Формы ω_1 и ω_2 удовлетворяют структурным уравнениям три-ткани

$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega,\quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega,$ (5) $\quad d\omega = b\,\omega_1 \wedge \omega_2.$ (6)

Так как $d\omega_2 = 0$, то из (4) следует $\omega = \lambda\omega_2$. (7)

Дифференцируя (3) с учетом уравнений структуры (5) и (6), находим $\omega = -\dfrac{\omega_2}{y + g(x)}$. (8)

Дифференцируя (8) внешним образом, получаем $b = \dfrac{g'}{(y + g)^3}$. (9)

Итак, получена кривизна b три-ткани, задаваемой линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Из (9) находим ковариантные производные кривизны

$$b_1 = \frac{g''}{(y+g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^5}, \qquad b_2 = -\frac{g'}{(y+g)^4}. \tag{10}$$

Вторые ковариантные производные имеют вид:

$$b_{21} = -\frac{g''}{(y+g)^5} + \frac{4g'^2}{(y+g)^6}, \qquad b_{22} = \frac{g'}{(y+g)^5}. \tag{11}$$

Исключая из уравнений (9) – (11) переменные g, g' и т.д. получим соотношения, связывающие относительные инварианты три-ткани: $bb_{22} - (b_2)^2 = 0$, $bb_{21} - b_1b_2 - b^3 = 0$. (12)

Верно и обратное утверждение, т.е. три-ткань, для которой выполняются соотношения (12), соответствует дифференциальное уравнение первого порядка [2] .

Итак, инварианты три-тканей, определяемых линейным дифференциальным уравнением, и только таких три-тканей удовлетворяют соотношениям (12).

2. Пусть три-ткань W задается дифференциальным уравнением Риккати

$$y' = f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x). \tag{13}$$

С помощью изотопических преобразований это уравнение может быть приведено к виду

$$dy + (y^2 + g(x)\, y + h(x))dx = 0. \tag{14}$$

Введем обозначения $\omega_1 = (y^2 + g(x)\ y + h(x))dx$, $\omega_2 = dy$. (15)

В результате уравнение, определяющее третье слоение, примет вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, а это означает, что структурные уравнения данной три-ткани W должны иметь вид (5), (6). Поступая как в первом случае, получаем

$$\omega = \lambda\omega_2, \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{2y+g}{y+g(x)}\omega_2, \tag{16}$$

$$b = \frac{g'y^2 + 2h'y + h'g - hg'}{(y^2+gy+h)^3}, \tag{17}$$

$$b_2 = -\frac{(-2h' + gg')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h}{(y^2+gy+h)^4} \tag{18}$$

$$b_{22} = \frac{(g^2 - 4h)(g'y^2 + 2h'y + h'g - hg')}{(y^2+gy+h)^5} \tag{19}$$

$$b_{222} = \frac{[(gg' - 2h')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h](g^2 - 4h)}{(y^2+gy+h)^6} \tag{20}$$

Исключая из уравнений (17) – (20) переменные g, h и т.д., придем к соотношению $b_{222}b - b_{22}b_2 = 0$. (21)

Верно и обратное утверждение, т.е. три-ткани, для которой выполняются соотношения (21), соответствует дифференциальное уравнение Риккати [3].

Итак, инварианты три-тканей, определяемых дифференциальным уравнением Риккати, и только таких три-тканей удовлетворяют соотношениям (21).

3. Пусть три-ткань определяется дифференциальным уравнением Абеля первого рода $y' = y^3 + f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x)$. Формы ω_1 и ω_2 такой три-ткани имеют вид

$$\omega_1 = (y^3 + f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x))dx, \qquad \omega_2 = dy, \tag{22}$$

а уравнение третьего слоения $\omega_1 + \omega_2 = 0$ и так же выполняются соотношения (5) и(6).

Рассмотрим следующие три частных случая уравнения Абеля.

а) Случай $g(x) = 0$, $h(x) = 0$. Дифференцируя уравнения (22) как и в предыдущих случаях получаем

$$b = \frac{f'}{y^2(y+f)^3}, \qquad b_2 = \frac{f'(y+2f)}{y^3(y+f)^4}, \qquad b_{22} = \frac{f'(3y^2 + 8fy + 6f^2)}{y^4(y+f)^5}, \tag{23}$$

$b_{222} = \frac{f'(15y^3 + 50fy^2 + 58f^2y + 24f^3)}{y^5(y+f)^6}$. Исключение из формул (23) переменных приводит к соотношению $b^2(b_{222}\ b - b_{22}b_2)^2 = 18\ (b_{22}b - b_2^2)^3$. (24)

Итак, относительные инварианты три-ткани, определяемой уравнением Абеля $y' = y^3 + f(x)\ y^2$, удовлетворяют соотношению (24).

б) Случай $f(x) = 0$, $g(x) = 0$. Для данного случая, получаем

$$b = \frac{3h'y^2}{(y^3+h)^3},\quad b_2 = -\frac{h'(3y^4 - 6h)}{(y^3+h)^4},\quad b_{22} = -\frac{h'(3y^6 + 24hy - 6h^2)}{(y^3+h)^5},\quad b_{222} = -\frac{h'(9y^6 + 18hy^3 + 90h^2)y^2}{(y^3+h)^6}. \tag{25}$$

Исключение из формул (25) переменных приводит к соотношению

$$b^2(b_{222}\ b - b_{22}b_2)^2 = -2\ (b_{22}b - b_2^2)^3. \tag{26}$$

Итак, относительные инварианты три-ткани, определяемой уравнением $y' = y^3 + f(x)$, связаны соотношением (26).

в) Случай $f(x) = 0$, $h(x) = 0$. Уравнение $y' = y^3 + g(x)\ y$ (уравнение Бернулли) подстановками $y = z^{-\frac{1}{2}}$ и $y = z^{\frac{1}{2}}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению или к уравнению Риккати. Вследствие этого относительные инварианты ткани должны удовлетворять условиям

$$bb_{22} - (b_2)^2 = 0, \qquad b_{222}b - b_{22}b_2 = 0. \tag{27}$$

Экспериментально проверено положительное влияние разработанной технологии на развитие у будущих учителей компонентов компетентности к организации работ по математическому просвещению и популяризации математики.

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс], утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р, 2013. – 9 с. - Режим доступа:
http://www.firo.ru/wp-content/uploads/2014/12/Concept_mathematika.pdf

2. Концепция Федеральной целевой программы развития образования на 2016-2020 гг. [Электронный ресурс], утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2014 г. № 2765-р, 2014. - 123 с. - Режим доступа: http://government.ru/media/files/mlorxfXbbCk.pdf

3. Профессиональный стандарт "Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования)(воспитатель, учитель)" [Электронный ресурс], утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н, 2013. – 24 с. - Режим доступа:
http://fgosvo.ru/uploadfiles/profstandart/01.001.pdf

4._Уткин А.А. Три-ткани, определяемые линейным дифференциальным уравнением / А.А. Уткин, А.М. Шелехов // Изв. Вузов. Математика. – 2001. – №11. – С. 54-57.

5. Уткин А.А. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати / А.А. Уткин, А.М. Шелехов // Изв. Вузов. Математика. – 2004. – № 11. – С. 87-90.